Provas Matemáticas

Ednaldo José Leandro

Doutor em Matemática pela PUC-SP.
Professor Associado da Fatec Itaquaquecetuba
e de Mogi das Cruzes
E-mail: ednaldo.leandro@fatec.sp.gov.br

Recebido: 13 ago. 2014 Aprovado: 25 out. 2014

Resumo: O objetivo deste artigo é refletir sobre a importância do ensino e aprendizagem das provas matemáticas na Educação Básica. Percebemos que os alunos, em geral, concluem esse nível de ensino sem o hábito de construir provas e, até mesmo, desconhecem sua importância para a validação dos conhecimentos na ciência matemática, mesmo sua abordagem estando presente nos parâmetros curriculares nacionais. Como em todo processo de aprendizagem, acreditamos que os alunos só avançam de acordo com os estímulos que recebem nesse ambiente.

Palavras-Chave: Provas Matemáticas. Educação Matemática Básica e Superior.

Abstract: The objective of this paper is to discuss the importance of teaching and learning of mathematical proofs in Basic Education. We realize that students generally conclude this level of education without the habit of building evidence and even unaware of its importance to the validation of knowledge in mathematical science, even their approach is present in the national curriculum guidelines. As in any learning process, we believe that students only advance according to the incentives they receive in this environment.

Keywords: Mathematical proofs. Basic Mathematics Education and Higher.

Resumen: El objetivo de este trabajo es discutir la importancia de la enseñanza y el aprendizaje de las pruebas matemáticas en la Educación Básica. Nos damos cuenta de que los estudiantes generalmente concluyen este nivel de la educación sin el hábito de construir pruebas y ni siquiera es consciente de su importancia para la validación de los conocimientos en la ciencia matemática, aunque su enfoque está presente en las directrices curriculares nacionales. Como en todo proceso de aprendizaje, creemos que los estudiantes sólo avanzan según los estímulos que reciben en este entorno.

Palabras Clave: Pruebas matemáticas. Básico Matemáticas Educación y Superior.

1 Considerações iniciais

Como professor de matemática em cursos de graduação na área tecnológica, percebemos as dificuldades dos alunos na elaboração de justificativas para os resultados apresentados. Essa dificuldade tem origem na Educação Básica, pois mesmo com a indicação do trabalho com provas matemáticas durante todo esse nível de ensino esteja nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) os alunos, em geral, o concluem sem o hábito de construí-lo e, até mesmo, desconhecem sua importância para a validação dos conhecimentos na ciência matemática.

Várias são as pesquisas internacionais encontradas associadas às provas matemáticas e de forma geral elas são elaboradas focadas em quatro perspectivas gerais: Didática, Epistemológica, Histórica e Cognitiva. Quanto ao ensino e aprendizagem, essas pesquisas apontam que as provas matemáticas permeiam os objetos matemáticos, sendo um processo possível de ser ensinado/aprendido.

Dentre essas pesquisas as que mais se destacam são as funções que as provas exercem e as suas tipologias. As funções das provas matemáticas vão além da simples “verificação” dos resultados matemáticos, função mais comum atribuída. Ou seja, existem outros objetivos além de assegurar a verdade de uma afirmação.

De Villiers (1990, 2001) expõe algumas funções das provas dentro da atividade matemática, buscando descrever novas motivações e objetivos a serem alcançadas no ensino e aprendizagem tornando-as mais significativas. Aponta como funções das provas matemáticas:

- *Verificação*, vista pela maioria como a única forma do matemático alcançar a certeza/convicção das propriedades matemáticas; utilizada quando precisamos nos convencer ou convencer alguém da verdade de uma afirmação. Muitas vezes, é depois de empregar o raciocínio indutivo, que se chega à convicção que algo é verdadeiro, o que resulta em incentivo para a busca da sua demonstração.
- *Sistematização*, pela organização dos diversos resultados conhecidos num sistema dedutivo, partindo de conceitos básicos ou axiomas e regras estabelecidas; pode servir para apontar inconsistência.

- *Descobrimento*, por permitir obter novos resultados dedutivamente; encontramos descobertas matemáticas que emergiram de processos puramente dedutivos e não apenas da intuição ou métodos empíricos.
- *Comunicação*, pela forma eficaz de transmissão dos conhecimentos matemáticos; encontramos aqui uma forte dimensão social, não fugindo nem mesmo a demonstração matemática, do contexto social e da negociação dos conceitos em jogo.
- *Desafio intelectual*, pelo desafio intelectual proporcionado na construção de uma prova matemática e pela grande engenhosidade necessária ao matemático para obter sucesso.
- *Explicação*, pela exibição dos motivos, razões das verdades apresentadas. Essa função é atingida quando a prova fornece os indícios do por que ela é verdadeira, característica apontada por matemáticos e educadores matemáticos como o aspecto mais importante da prova.

De Villiers (2001) defende no ensino e aprendizagem a abordagem da dúvida como forma eficiente de fazer os alunos avançarem na elaboração de justificativas em matemática. Os alunos precisam sentir a necessidade de provar, justificar e convencer o outro a respeito de suas afirmações. Apresentar os motivos pelos quais acredita ser a afirmação correta, não só para se convencer, mas também para convencer o outro, dividir com o outro a sensação da certeza, deixando explícito porque acredita como chegou a uma dada conclusão e o que respalda sua convicção.

Quanto às tipologias das provas matemáticas, encontramos vários pesquisadores que apresentam uma classificação das provas matemáticas elaboradas pelos alunos da Educação Básica. Um deles, Balacheff (1987, 2000), distingue entre provas pragmáticas e provas intelectuais.

Os trabalhos de Balacheff (1987, 2000) são particularmente importantes, pois neles encontra-se relevante investigação sobre os processos de provas que apresentaram alunos de 12 a 15 anos. Na sua pesquisa com alunos adolescentes, Balacheff estudou os argumentos utilizados por eles para seu próprio convencimento, chegando às categorias: Provas Pragmáticas e Provas Intelectuais. Para o autor, os alunos usam Provas Pragmáticas quando utilizam a ação (baseados em manipulações ou exemplos concretos) e as Provas Intelectuais quando se utilizam de ações interiorizadas (baseadas em formulações abstratas de propriedades matemáticas e de relações entre elas).

Essas duas categorias propostas por Balacheff (1987) ainda são subdivididas em quatro tipos, nessa ordem e hierarquia, a saber:

1. *Empirismo ingênuo*: é o tipo de prova mais simples; nele os alunos afirmam a validade da propriedade depois de verificar apenas alguns exemplos;

2. *Experiência crucial*: nele os alunos elegem minuciosamente um exemplo, mas ao contrário do empirismo ingênuo tentam, explicitamente, generalizar a propriedade, mesmo verificando em um caso particular, não o consideram tão particular acreditando poder ser geral;

3. *Exemplo genérico*: nele os alunos utilizam um caso específico para representar todos os casos possíveis em um argumento geral; e

4. *Experiência mental*: nele os alunos utilizam apenas raciocínios interiorizados e não mais ligados a ação, verificação concreta.

Em seu trabalho encontra-se uma descrição de cada um desses tipos de provas, obtidas após análise das respostas apontadas pelos alunos a um problema que envolve o número de diagonais de um polígono. Para Balacheff (1987), o *empirismo ingênuo* e a *experiência crucial* estão categorizados como Provas Pragmáticas. Já a *experiência mental* está categorizada como Prova Intelectual. O exemplo genérico é classificado ora em Provas Pragmáticas, ora como Provas Intelectuais.

Nos trabalhos de Balacheff ainda encontramos definições de alguns termos importantes como "explicação", "provas" e "demonstração". Nesses trabalhos o termo "explicação" é uma ideia primitiva da qual deriva os termos "prova" e "demonstração". A seguir, descrevemos os termos definidos e hierarquizados, denominados tipos de sofisticações de provas.

a) Na *explicação* se busca o convencimento a partir da explicitação do caráter verdadeiro da afirmação em que as razões expostas podem ser discutidas, refutadas ou aceita.
b) A *prova* é constituída por explicações aceitas por certa comunidade num certo momento, que pode ser objeto de um debate.
c) A *demonstração* é uma prova que segue regras determinadas e são aceitas pela comunidade matemática, ou seja, obtida a partir das que a

antecedem por um processo dedutivo, usando um conjunto de regras bem definidas.

Enquanto Balacheff (1987) toma como base a relação entre sujeito e processo de validação outros pesquisadores, por exemplo, Harel e Sowder (2007) utilizam uma categorização tomando como referência o estudante, produtos individuais, denominado *Proof Schemes* – (esquemas de prova), que são tipos de justificativas que convencem os estudantes, e que eles utilizam para convencer os outros colegas e o professor.

Para a definição de "esquema de prova", Harel e Sowder (2007, p. 808-809) apoiam-se em três definições:

I. *Conjectura versus fato*: a afirmação pode ser concebida pelo indivíduo como uma conjectura ou um fato. Como conjectura quando faz uma afirmação cuja verdade é incerta, deixando de ser conjectura para torna-se um fato quando para o indivíduo a afirmação se torna verdadeira.
II. *Provar*: é o processo utilizado por um indivíduo (ou uma comunidade) para remover dúvidas sobre a verdade de uma afirmação. Esse processo engloba dois subprocessos – verificar e convencer.
III. *Verificar versus convencer*: verificar é o processo que um indivíduo (ou uma comunidade) emprega para remover as suas próprias dúvidas sobre a verdade de uma afirmação. Convencer, persuadir, é o processo que um indivíduo (ou comunidade) emprega para remover as dúvidas dos outros sobre a verdade de uma afirmação.

Então, não basta para a Matemática um procedimento de prova fazer sentido apenas para o próprio indivíduo, mas também deve o procedimento adotado ser capaz de convencer outros por meio da explicação e justificação das suas conclusões. Esse aspecto de convencer os outros, persuadir, constitui a dimensão pública da demonstração e é uma prática social não só para matemáticos, mas também para quem estuda matemática. Assim, persuadir e convencer são processos subjetivos e provar pode variar de indivíduo para indivíduo, de contexto para contexto, de civilização para civilização e, dentro da mesma civilização, de geração para geração (HAREL; SOWDER, 2007, p. 809).

Dadas essas considerações os autores apresentam a definição de esquema de prova de uma pessoa (ou comunidade) consiste em determinar o que constitui verificar e persuadir para essa pessoa (ou comunidade).

Os autores ainda identificam três categorias de esquemas de prova, centrada no aluno, são elas: *External Conviction Proof Schemes*, *Empirical Proof Schemes* e *Analytical Proof Schemes*, Harel e Sowder (2007, p. 809).

- *External Conviction Proof Schemes* (esquemas de prova por convicção externa): quando o modo utilizado para validação se refere a uma autoridade externa, por exemplo, o professor falou, está assim no livro didático; ou pela forma simbólica.
- *Empirical Proof Schemes* (esquemas de prova empírica): quando o modo utilizado para validação são exemplos, pode ser perceptivo: realizado por observações físicas, por exemplo, gráficos; ou indutivo: realizado por experimentações concretas.
- *Analytical Proof Schemes* (esquemas de prova analítica ou dedutiva): quando o modo utilizado para validação se baseia em argumentos abstratos e deduções lógicas, denominado transformativo, que considera os aspectos de generalidade da conjectura, transformando imagens mediante processos dedutivos ou axiomáticos.

Observamos que a classificação de Harel e Sowder (2007) é mais ampla que a de Balacheff (1987), ampliando nossa visão quanto às provas matemáticas. Esses tipos de raciocínios descritos são importantes, uma vez que se podem identificar os níveis de conhecimentos dos alunos, e assim contribuir na orientação dos professores no desenvolvimento de atividades que possibilitem o avanço dos alunos entre os tipos de provas elaboradas até chegarem a provas mais formais.

Aqui reside uma questão fundamental: é possível o ensino e aprendizagem das provas matemáticas na Educação Básica?

Nos cursos de nível superior que ministramos, principalmente nos cursos de ciências da computação, são muitas e bem conhecida as dificuldades dos alunos nas disciplinas de exatas. Dificuldades essas causadas principalmente pela falta de um trabalho sistemático com esses alunos na Educação Básica, com base no referencial abordado anteriormente.

Os alunos geralmente se convencem de generalizações apresentadas, não questionando e por consequência não necessitando de métodos para comprovar o que foi apresentado.

Em minhas aulas alguns problemas clássicos, por exemplo: Ao serem questionados se o polinômio $P(x)=x^2+x+41=0$ gera ou não apenas números primos, para um x qualquer natural, os alunos verificando apenas para alguns casos, $x=1, x=2, x=3, \ldots, x=20$, sentenciam a veracidade e generalidade da afirmação. No entanto, como podemos verificar para $x=41$ o valor numérico do polinômio não resulta um número primo ($41.41+41+41=43.41=1763$), que tem como divisores além dele mesmo o 1, 41 e 43. O que mostra nem sempre ser confiável tal método.

A seguir apresentamos um exemplo de prova ingênua, geralmente elaborada pelos alunos universitários quando solicitado para provar que $P(n)=n^3-n$ é divisível por 3, para qualquer $n \geq 1$ pertencente aos números naturais.

Para $n=1$, $1^3-1=0$ que é divisível por 3, pois $3.0=0$

$n=2$, $2^3-2=6$ que é divisível por 3, pois $3.2=6$

$n=3$, $3^3-3=24$ que é divisível por 3, pois $3.8=24$,

logo, para todo número natural n a afirmação é verdadeira.

Apenas após se convencer da ineficiência de métodos de verificação de alguns casos para sentenciar a verdade de uma conjectura é que os alunos sentem a necessidade de métodos mais sofisticados.

Quando apresentada uma justificativa aceitável a mais comum é:

$P(n)=n^3-n=n(n^2-1)$	- obs: termo em evidência.
$n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)$	- obs: diferença de quadrado
$n(n+1)(n-1)= (n-1).n.(n+1)$	- obs: comutativa e temos o produto de três número consecutivos, assim um deles é múltiplo de 3, logo o produto também é múltiplo e divisível por 3.

Os comentários apresentados são consequência de um trabalho nas aulas de matemática discreta e algoritmos, visando contribuir com uma prática necessária durante a programação que é elaborar anotação/comentários.

Durante as aulas de matemática discreta, são apontados métodos mais adequados para justificar problemas como o apresentado, por exemplo, o principio da indução finita (PIF) ou o algoritmo da divisão. Utilizando o algoritmo da divisão para provar que $P(n)=n^3-n$ é divisível por 3, para qualquer $n \geq 1$ pertencente aos números naturais, teríamos.

Divisibilidade de Inteiros

Sejam a e b dois inteiros. Dizemos que a divide b, ou a é um divisor de b, ou ainda b é múltiplo de a, se existe um inteiro m tal que $b = am$.

Teorema (O algoritmo da divisão)

Sejam a um inteiro e d um inteiro positivo. Então existem inteiros únicos q e r, com $0 \leq r < d$, de forma que $a = dq + r$.

Com o exposto acima podemos separar todos os números naturais em par (múltiplo de 2) ou ímpar(deixa resto 1 quando dividido por 2).

Utilizando a divisibilidade por 3 teríamos que qualquer número n:

- ou é múltiplo de 3;
- ou deixa resto 1 quando dividido por 3;
- ou deixa resto 2 quando dividido por 3. Ou seja: $n=3k$, $n=3k+1$ ou $n=3k+2$, para qualquer $k \geq 0$ pertencente aos números naturais.

Utilizando os três possíveis valores de n quando divisível por 3, em $P(n)=n^3-n$, verificaríamos um a um que o resultado seria um número do tipo 3k, ou seja, múltiplo de 3 o que significa que é divisível por 3, como queríamos demonstrar.

Claro que as manipulações e as propriedades algébricas vão sendo construídas pelos alunos durante a construção dos métodos e conceitos pelos alunos. Percebem ainda durante essa construção que as provas matemáticas são, socialmente, construídas e sujeitas às mais diversas influências.

O ensino e aprendizagem das provas matemáticas desempenham funções distintas, sempre mobilizando habilidades próprias do pensamento racional. Acreditamos que um processo bem planejado é o que permite aos alunos construírem e avançarem nos níveis de argumentação e provas existentes. No entanto, como em todo processo de aprendizagem, os alunos só avançam de acordo com os estímulos que recebem nesse ambiente.

Referências

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational studies in mathematics**, vol.18, n. 2, p.147-176, 1987.

________. **Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas**: una empresa docente, Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia, 2000.

________. **Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des éleves de collège**. Thèse d'état, Grenoble: Université Joseph Fourier,1988.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

De VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Revista Educação e Matemática**, Junho, n. 63, p. 31-36, 2001.

_______.The role and function of proof in Mathematics. **Pythagoras**, n. 24, p. 17-24, 1990.

_______. El papel y la función de la demostración en matemáticas. **Épsilon**, 26, p. 15-30, 1993.

HAREL, G. e SOWDER, L. Towards comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. LESTER, F.K. (ed.), **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning** (p. 805-842). Charlotte, NC: NCTM and IAP, 2007.